6 Funksjonslære

> restart:

6.1 Funksjonsdrøfting

Den deriverte skifter fortegn ved passering av et toppunkt eller et bunnpunkt (ekstremalpunkter). Det kan vi f.eks. vise ved kommandoen **Derivasjon**.

Eksempel 6.1.1

Tegn grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3$.

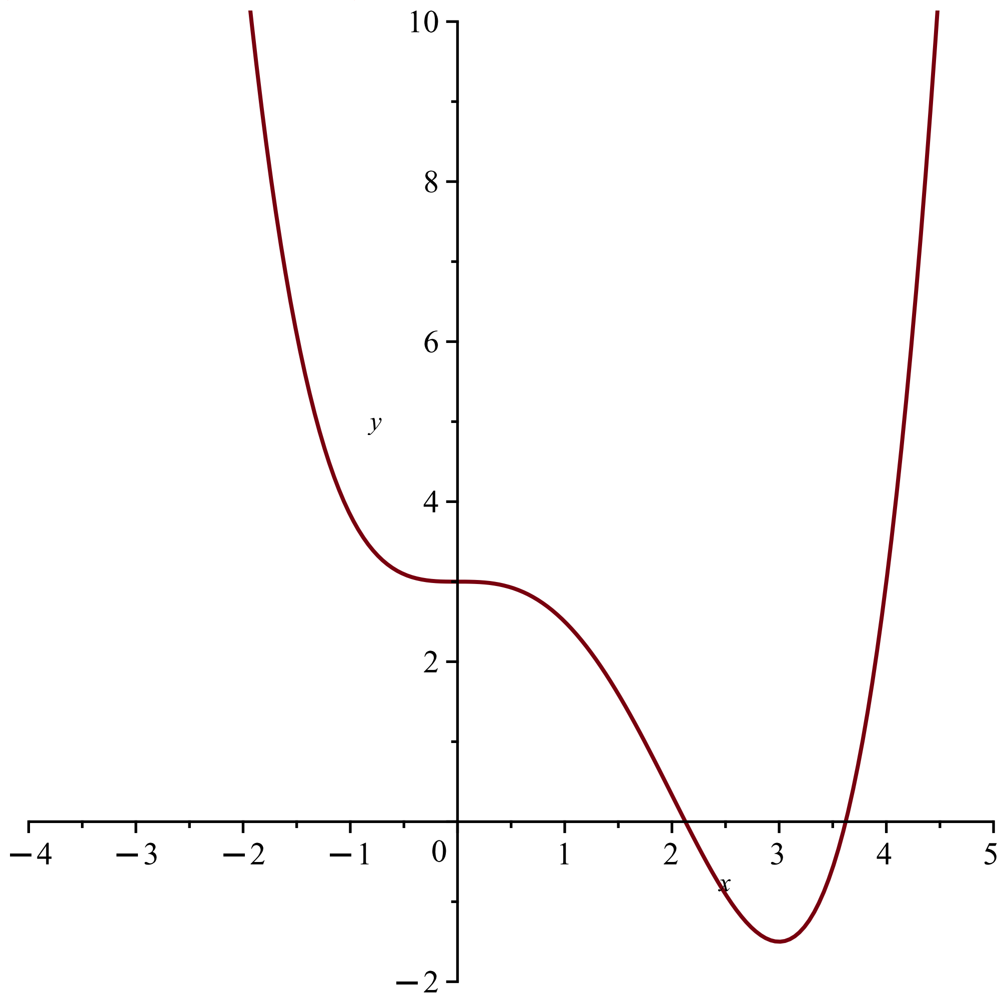
Finn eventuelle ekstremalpunkter.

Løsning

> $f := x \mapsto \frac{1}{6} \cdot x^4 - \frac{2}{3} \cdot x^3 + 3$

$$f := x \mapsto \frac{1}{6} \cdot x^4 - \frac{2}{3} \cdot x^3 + 3$$

> $plot(f(x), x = -4..5, y = -2..10)$



> $Diff(f(x), x) = diff(f(x), x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3\right) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$$

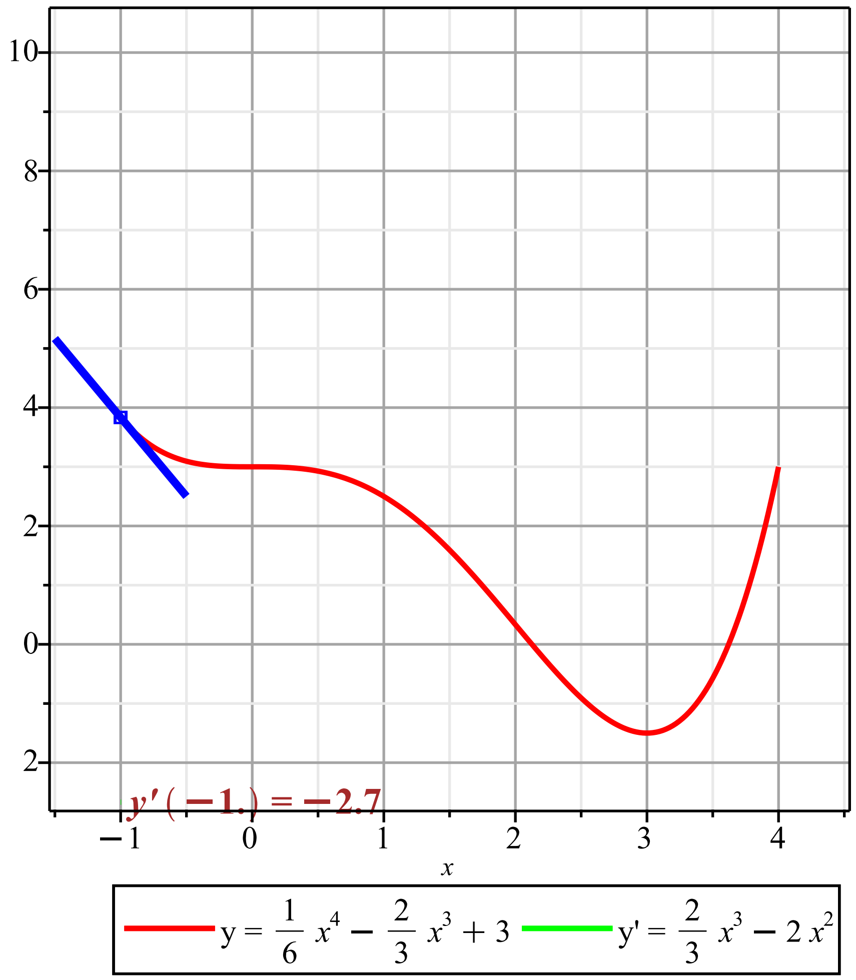
Vi setter den deriverte lik null og løser med hensyn på x .

> *solve*(*rhs*(%), {*x*})

$$\{x=3\}, \{x=0\}, \{x=0\}$$

Vi har et bunnpunkt for $x=3$ og et vendepunkt for $x=0$.
La oss vise endringen av fortegnet for den deriverte ved animasjons-kommandoen **Derivasjon**.

> *Derivasjon*(*f*, *x* = −1 ..4, 60)

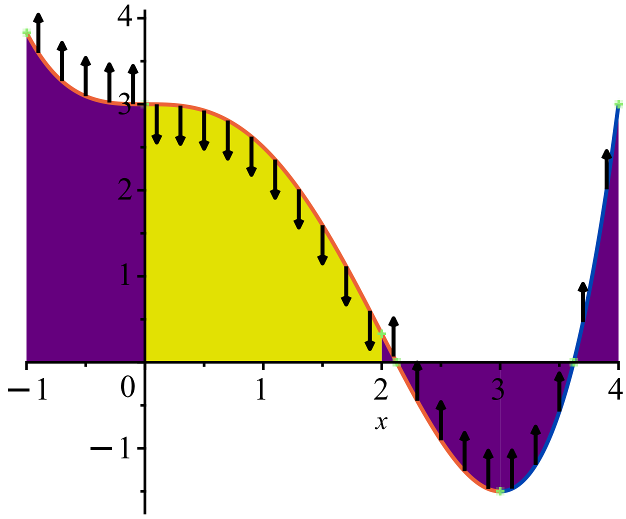


- FunctionChart(*f*(*x*), *x*=*a*..*b*) plotter $f(x)$ og visualiserer forskjellige egenskaper ved kurven ved hjelp av farger, piler og punkter
- CriticalPoints($f(x)$) finner x-verdiene til kritiske punkter, dvs. der $f'(x) = 0$ eller der $f'(x)$ ikke eksisterer
- ExtremePoints($f(x)$, $x = a..b$) finner x-verdiene for maksimums- og minimumspunkter til $f(x)$ innenfor intervallet [a, b]

> *FunctionChart*($f(x)$, $x = -1..4$)

Punktene kan gjøres større, og standard tittel kan forandres.

> *FunctionChart*($f(x)$, $x = -1..4$, *pointoptions* = [*symbolsize* = 20], *title* = *typeset*('$f(x)$' = $f(x)$))

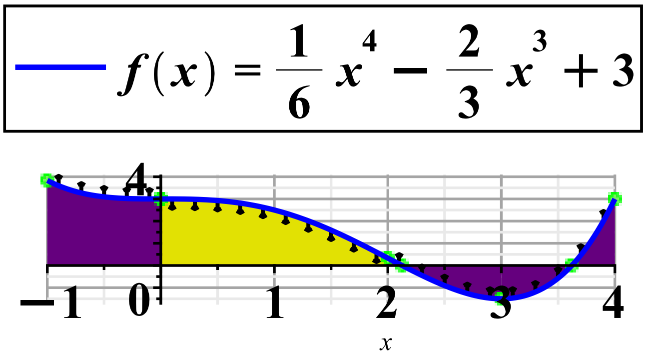


A chart of $\frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3 = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 +$

> CriticalPoints(f(x))

$[0, 3]$

> FunksjonsDrøfting(f, x = −1..4, p)



Nullpunkter: [[2.126, 0.], [3.62

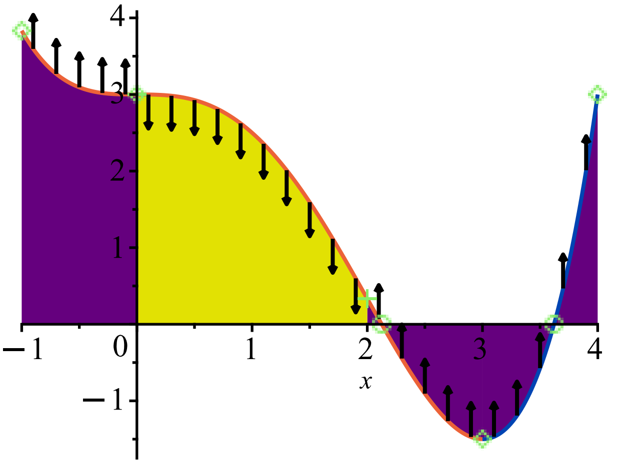
***Kritiske punkter*:** [[0., 3.], [3., -

***Vendepunkter*:** [[0., 3.], [2., 0.3

***Randpunkter*:** [[−1., 3.833], [4

>

$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3$

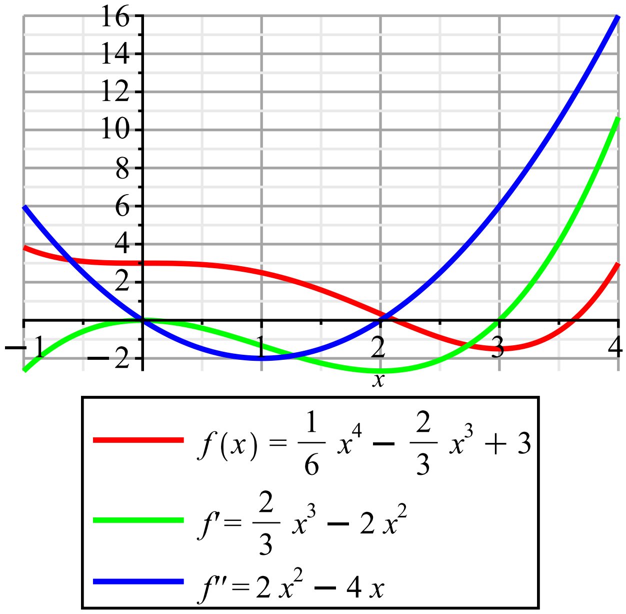


A chart of $\frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3 = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 +$

> ExtremePoints(f(x), x = −1..4)

$[-1, 3, 4]$

> p



Eksempel 6.1.2

Finn eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2$$

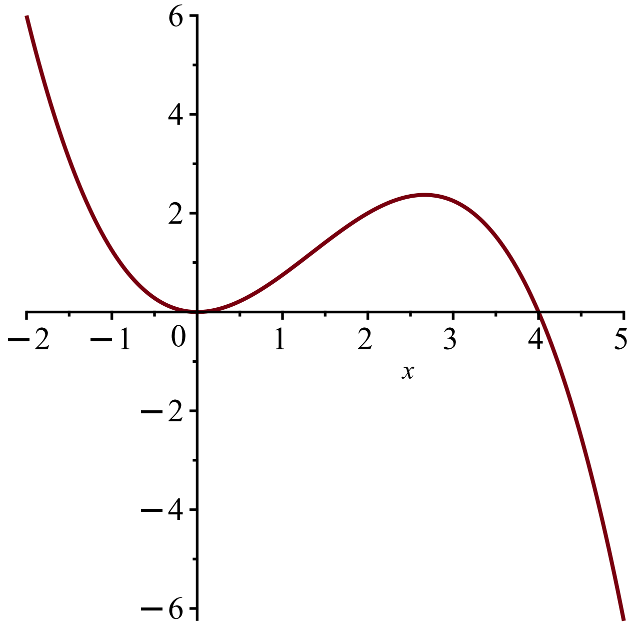
Løsning

$> f := x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot x^3 + x^2$

$$f := x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot x^3 + x^2$$

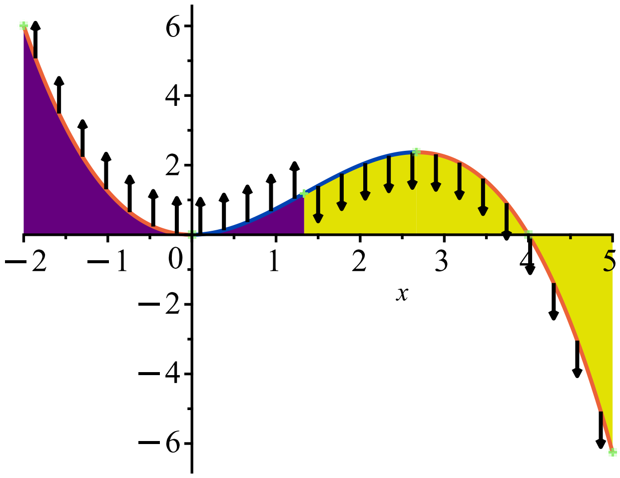
Det lønner seg alltid å plotte grafen til $f(x)$ for å få en oversikt over kurveforløpet.

$> plot(f(x), x = -2..5)$



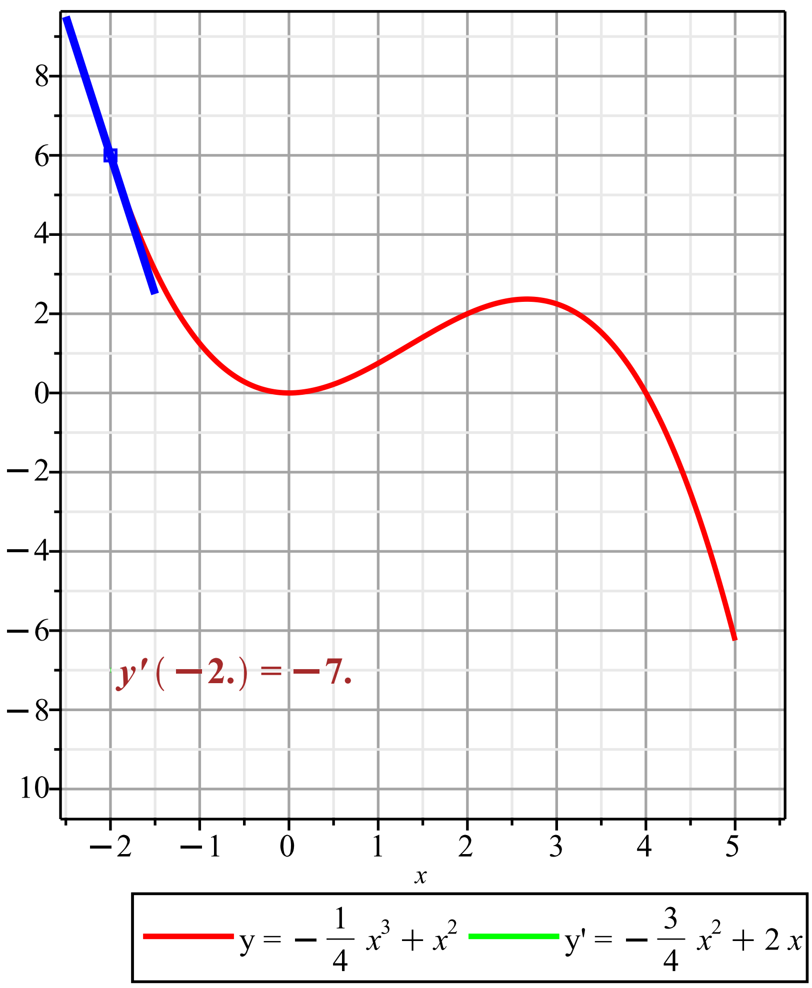
$> FunctionChart(f(x), x = -2..5, title = typeset('f(x)' = f(x)))$

$f(x) = -\frac{1}{4}\,x^3 + x^2$



A chart of $-\frac{1}{4}\,x^3 + x^2 = -\frac{1}{4}\,x^3 + x^2$.

$> Derivasjon(f, x = -2..5, 60)$



>

Vi deriverer og setter den deriverte lik null.

> *Diff*(*f*(*x*), *x*) = *diff*(*f*(*x*), *x*)

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}x^3 + x^2\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x$$

> *solve*(*rhs*(%), {*x*})

$$\{x = 0\}, \left\{x = \frac{8}{3}\right\}$$

> *map*(*subs*, [%], '*f*(*x*)' = *f*(*x*))

$$\left[f(0) = 0, f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}\right]$$

Resultatet stemmer med figuren.

Videre kan vi beregne hvor den deriverte er positiv og hvor den er negativ.

$f'(x) < 0$ når

> *solve*(*diff*(*f*(*x*), *x*) < 0, {*x*})

$$\{x < 0\}, \left\{\frac{8}{3} < x\right\}$$

$f'(x) > 0$ når

> *solve*(*diff*(*f*(*x*), *x*) > 0, {*x*})

$$\left\{0 < x, x < \frac{8}{3}\right\}$$

> $CriticalPoints(f(x))$

$$\left[0, \frac{8}{3}\right]$$

> $ExtremePoints(f(x), x = -2..5)$

$$\left[-2, 0, \frac{8}{3}, 5\right]$$

Bunnpunkt i

> $Bunn := [0, f(0)];\ Topp := \left[\frac{8}{3}, f\left(\frac{8}{3}\right)\right]$

$$Bunn := [0, 0]$$

$$Topp := \left[\frac{8}{3}, \frac{64}{27}\right]$$

6.2 Andrederiverte

> $restart:$

Den andrederiverte er definert på samme måte som den første deriverte.

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Dersom $f''(x_0) < 0$ har f et maksimalpunkt for $x = x_0$.
Dersom $f''(x_0) > 0$ har f et minimalpunkt for $x = x_0$.

Eksempel 6.2.1

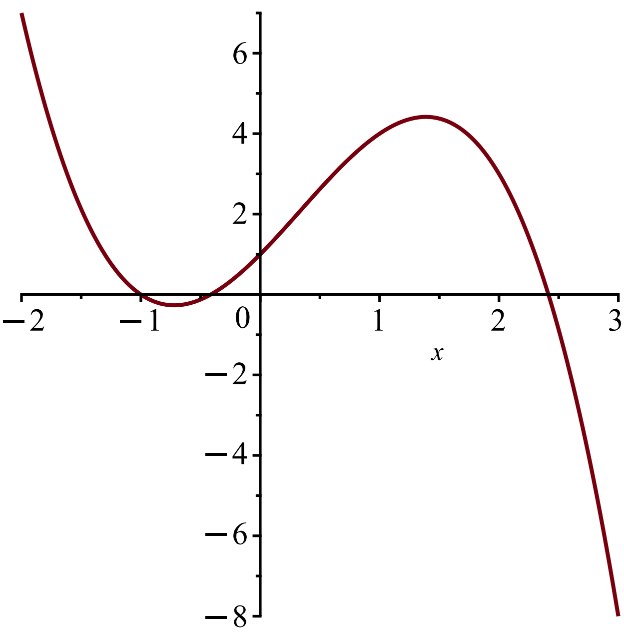
Finn eventuelle ekstremalpunkter til
$f(x) = 1 + 3x + x^2 - x^3$

Løsning

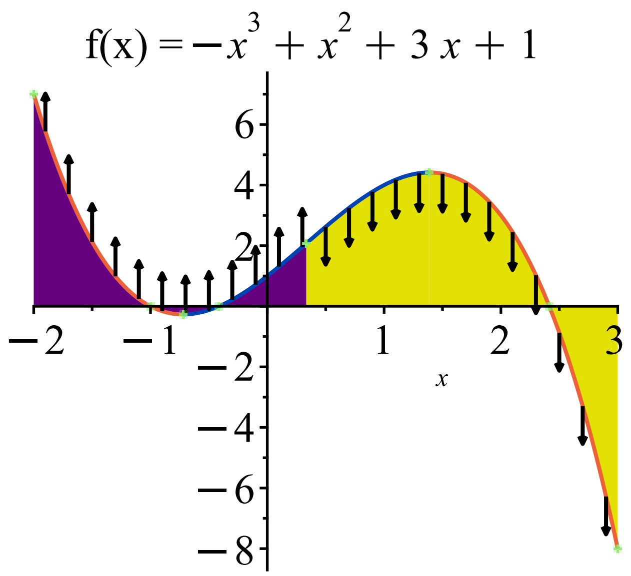
> $f := x \mapsto 1 + 3 \cdot x + x^2 - x^3$

$$f := x \mapsto 1 + 3 \cdot x + x^2 - x^3$$

> $plot(f(x), x = -2..3)$



> $p1 := FunctionChart(f(x), x = -2..3, title = typeset(\text{"f(x) ="}, f(x)), font = [times, roman, 16]):$
%



A chart of $-x^3 + x^2 + 3x + 1 = -$

> *CriticalPoints*($f(x)$)

$$\left[\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}\right]$$

> *evalf*(%)

$$[-0.7207592197, 1.387425886]$$

> *ExtremePoints*($f(x), x = -2..5$)

$$\left[-2, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}, 5\right]$$

> *evalf*(%)

$$[-2., -0.7207592197, 1.387425886, 5.]$$

Ekstremalpunktene finnes ved

> *Diff*($f(x), x$) = 0

$$\frac{d}{dx}\left(-x^3 + x^2 + 3x + 1\right) = 0$$

> *value*(%)

$$-3x^2 + 2x + 3 = 0$$

> *solve*(%, {x})

$$\left\{x = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}\right\}, \left\{x = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}\right\}$$

> *evalf*(%)

$$\{x = -0.7207592197\}, \{x = 1.387425886\}$$

Funksjonsverdiene blir

> *map*(*subs*, [%], 'f' (x) = f(x))

$$[f(-0.7207592197) = -0.268353822, f(1.387425886) = 4.416501971]$$

Vi regner så ut $f''(x)$.

> *Diff*($f(x), x, x$) = *diff*($f(x), x, x$)

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(-x^3 + x^2 + 3x + 1\right) = -6x + 2$$

Vi kan få uttrykt både den førstederiverte og den andrederiverte direkte som funksjoner ved bruk av differensialoperatoren D = $\frac{d}{dx}$.

> D(f)(x), D(D(f))(x)

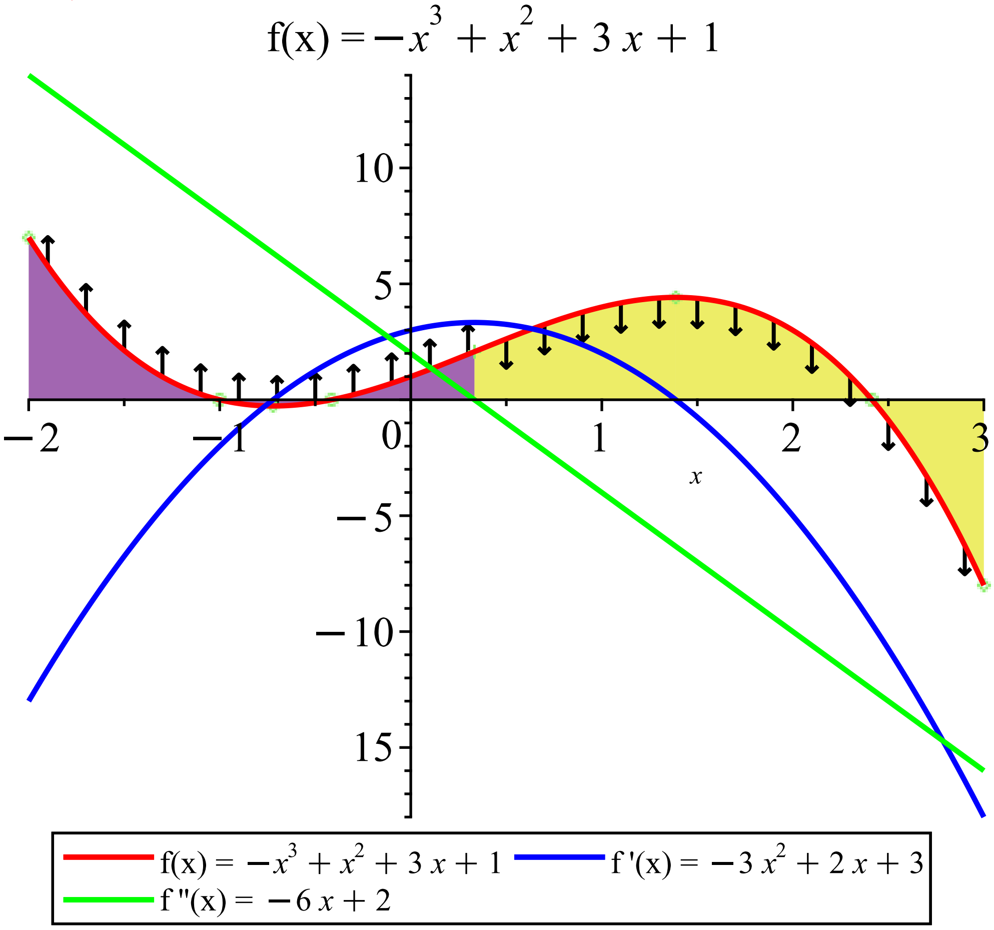
$$-3x^2 + 2x + 3, \; -6x + 2$$

> df := D(f) : d2f := D(D(f)) :

Vi plotter $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ i samme aksesystem.

> p2 := plot([f(x), df(x), d2f(x)], x = −2..3, color = [red, blue, green], legend = [typeset("f(x) = ", f(x)), typeset("f '(x) = ", df(x)), typeset("f ''(x) = ", d2f(x))], thickness = 2) :

> display(p1, p2)



A chart of $-x^3 + x^2 + 3x + 1 = -x^3 + x^2 + 3x + 1$.

Av figuren ser vi at $f'(x) = 0$ og $f''(x) > 0$ der $f(x)$ har et relativt minimum og at $f'(x) = 0$ og $f''(x) < 0$ der har et relativt maksimum.

$f(x)$ er avtagende i området

> evalf(solve(df(x) < 0, {x}), 3)

$$\{x < -0.717\}, \{1.38 < x\}$$

og $f(x)$ er økende i området

> evalf(solve(0 < df(x), {x}), 3)

$$\{-0.717 < x, x < 1.38\}$$

6.3 Kontinuitet og deriverbarhet

> restart :

En funksjon f er kontinuerlig for $x = a$ dersom $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Det vil si at grenseverdien er lik funksjonsverdien i punktet. Det betyr også at

de ensidige grenseverdiene (når x går mot a fra begge sider) må være like. Maple-kommandoene for ensidige grensevedier er

- limit($f(x)$, $x = a$) beregner grenseverdien til $f(x)$ når x går mot a

- limit($f(x)$, $x = a$, *left)* beregner grenseverdien når x går mot a nedenfra
  limit($f(x)$, $x = a$, *right)* beregner grenseverdien når x går mot a ovenfra
  Limit med stor L skriver ut selve grenseverdisymbolet.

> $Limit(f(x), x = a, right) = limit(f(x), x = a, right)$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Eksempel

Finn $\lim_{x \to 2} \frac{2x}{x - 2}$

Løsning

> $f := x \mapsto \frac{2 \cdot x}{x - 2}$:

> $Limit(f(x), x = 2) = limit(f(x), x = 2)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x}{x - 2} = undefined$$

> $Limit(f(x), x = 2, left) = limit(f(x), x = 2, left)$

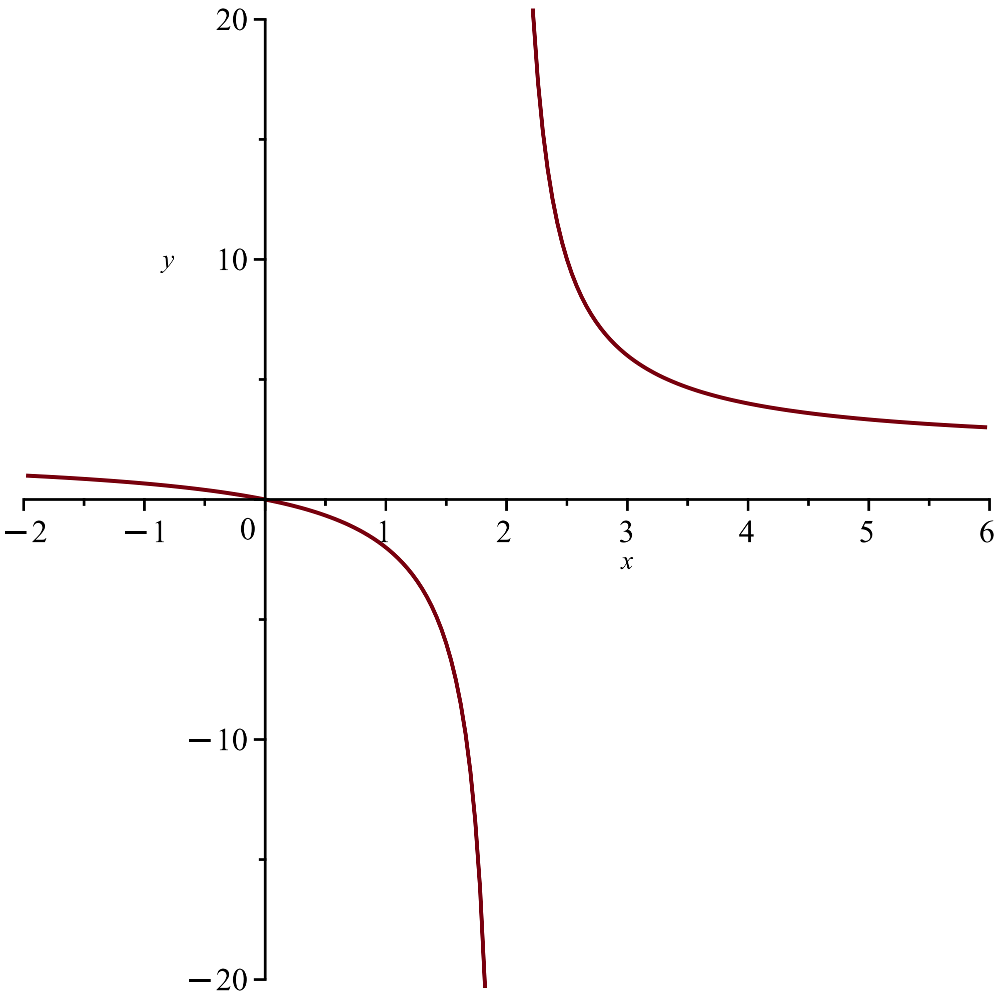
$$\lim_{x \to 2-} \frac{2x}{x - 2} = -\infty$$

> $Limit(f(x), x = 2, right) = limit(f(x), x = 2, right)$

$$\lim_{x \to 2+} \frac{2x}{x - 2} = \infty$$

Grenseverdien eksisterer ikke fordi det er brudd i funksjonen for $x = 2$ og funksjonen er ikke kontinuerlig for $x = 2$. Grafen blir

> $plot(f(x), x = -2..6, y = -20..20)$



>

6.4 Rasjonale funksjoner og asymptoter

Funksjonen f over er et eksempel på en rasjonal funksjon, der teller og nevner er funksjoner av x. Vi kan plukke ut teller og nevner til en rasjonal funksjon med kommandoene numer og denom.

- numer($f(x)$) plukker ut telleren i $f(x)$
- denom($f(x)$) plukker ut nevneren i $f(x)$
- Asymptoter($f(x)$, $x = a..b$) i vgs-pakken finner asymptoter

Grafen til en funksjon av typen

> $f := x \mapsto \dfrac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$:

> $numer(f(x))$

$$a\,x + b$$

> $denom(f(x))$

$$c\,x + d$$

har en vertikal asymptote der nevneren er lik 0.

> $solve(denom(f(x)) = 0, \{x\})$

$$\left\{x = -\frac{d}{c}\right\}$$

Den horisontale asymptoten finnes ved å la x gå mot pluss eller minus uendelig.

> $Limit(f(x), x = \infty) = limit(f(x), x = \infty)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a x + b}{c x + d} = \frac{a}{c}$$

> $Limit(f(x), x = -\infty) = limit(f(x), x = -\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a x + b}{c x + d} = \frac{a}{c}$$

Grafen til f vil ha en skrå asymptote dersom graden av telleren er en høyere enn graden av nevneren. Vi finner den skrå asypmtoten ved polynomdivisjon. Den greieste måten å gjøre dette på i Maple er ved

- convert $(f(x), parfrac, x)$ skriver $f(x)$ som en sum av delbrøker

Eksempel 6.4.1

Tegn grafen til $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

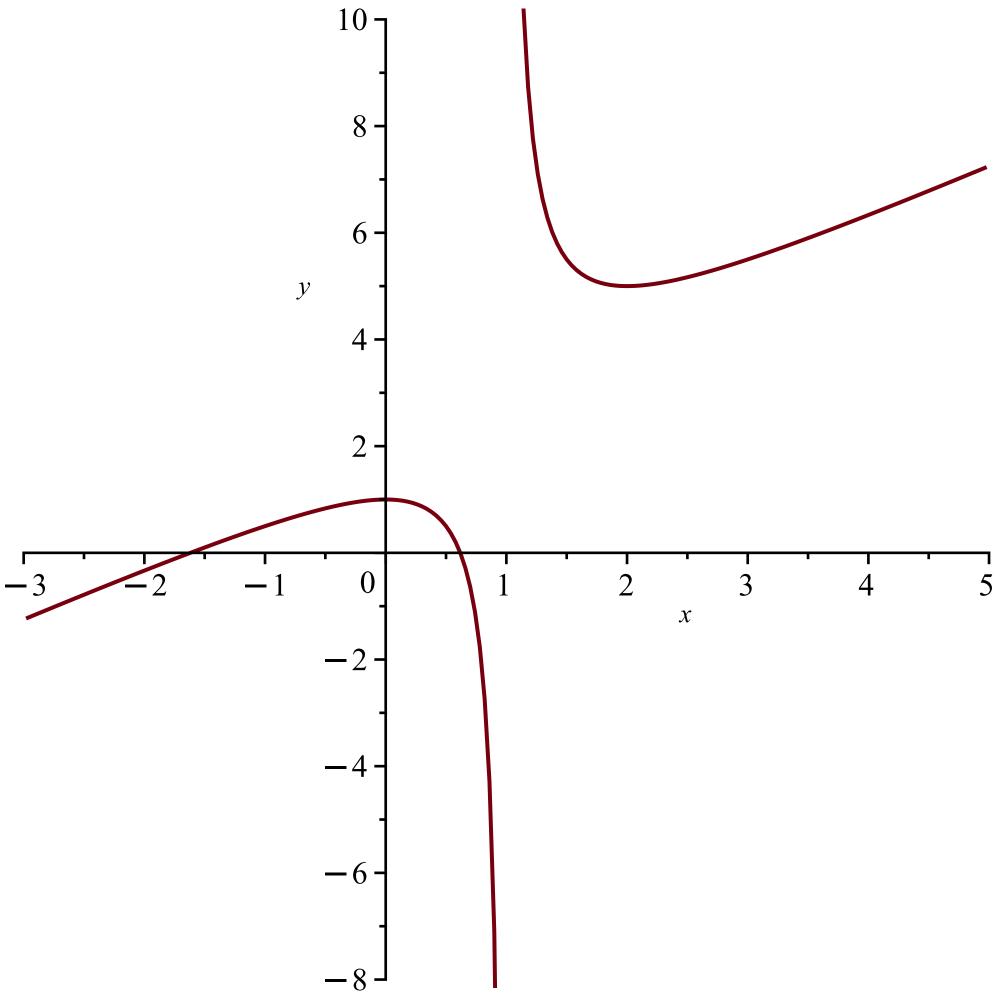
Finn asymptotene.

Løsning

> $f := x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

$$f := x \mapsto \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

> $plot(f(x), x = -3..5, y = -8..10)$



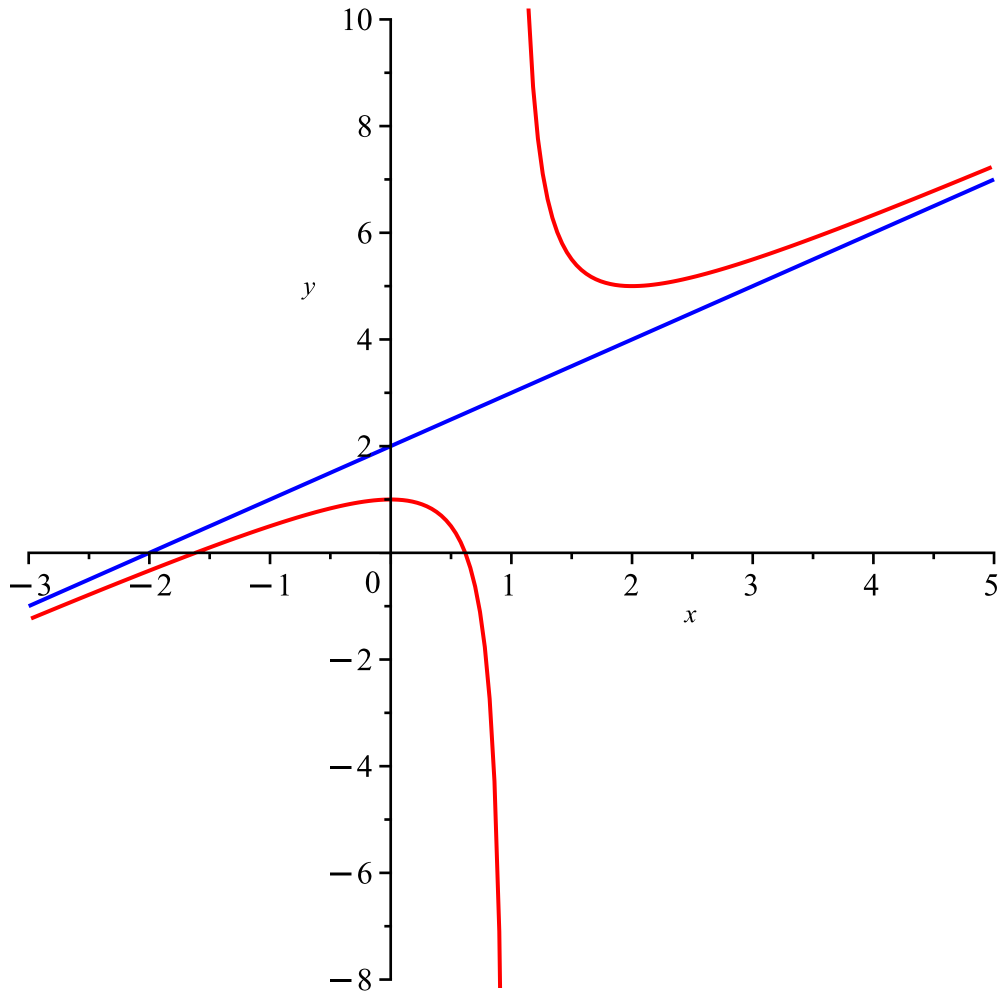
Maple plotter automatisk den vertikale asymptoten, her $x = 1$. Men $f(x)$ har også en skrå asymptote.

> $f(x) = convert(f(x), parfrac, x)$

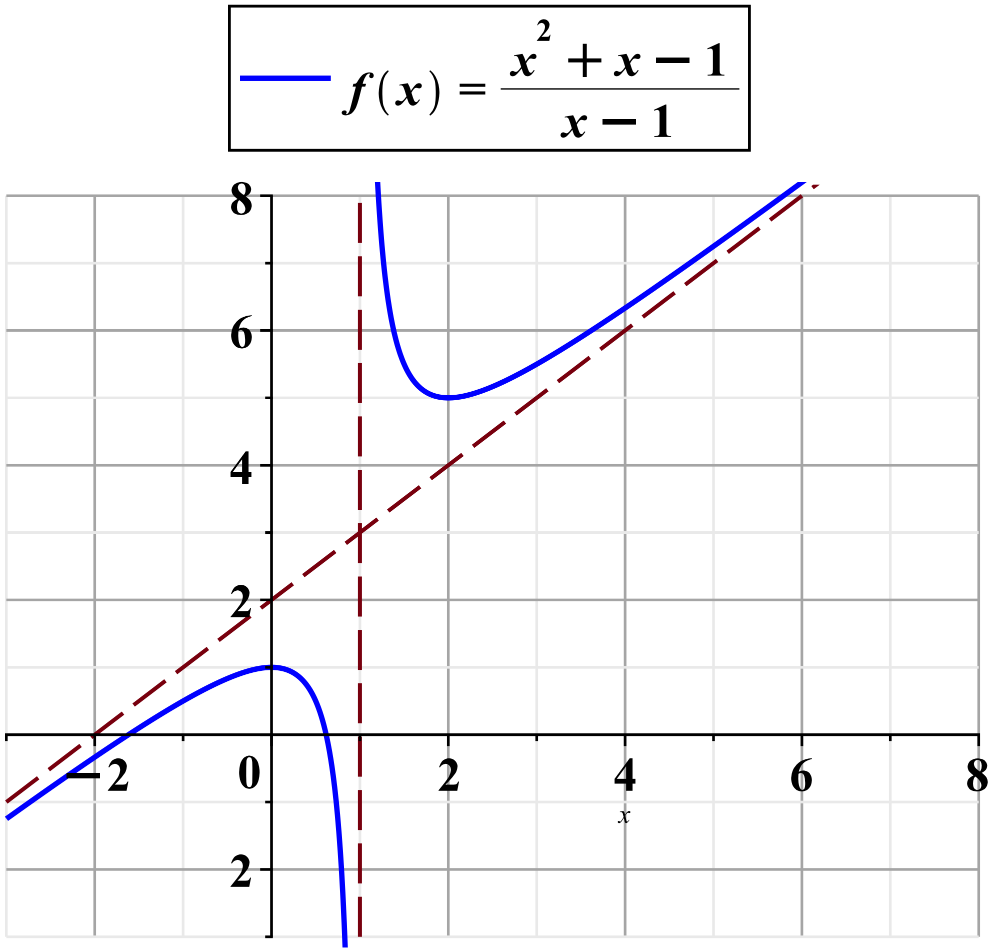
$$\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$$

Den skrå asymptoten er $y = x + 2$.

> $plot([f(x), x + 2], x = -3..5, y = -8..10, color = [red, blue])$



> *Asymptoter*$(f(x), x = -3..8)$



$Asymptoter$: $[y = x + 2, x = 1]$

Eksempel 6.4.2

Finn x når

a) $\frac{2x+1}{x-3} > 1$, **b)** $-x + 1 < \frac{2x+1}{x+1}$

Løsning

a)

> $f := x \mapsto \frac{2 \cdot x + 1}{x - 3}$:

> $1 < f(x)$

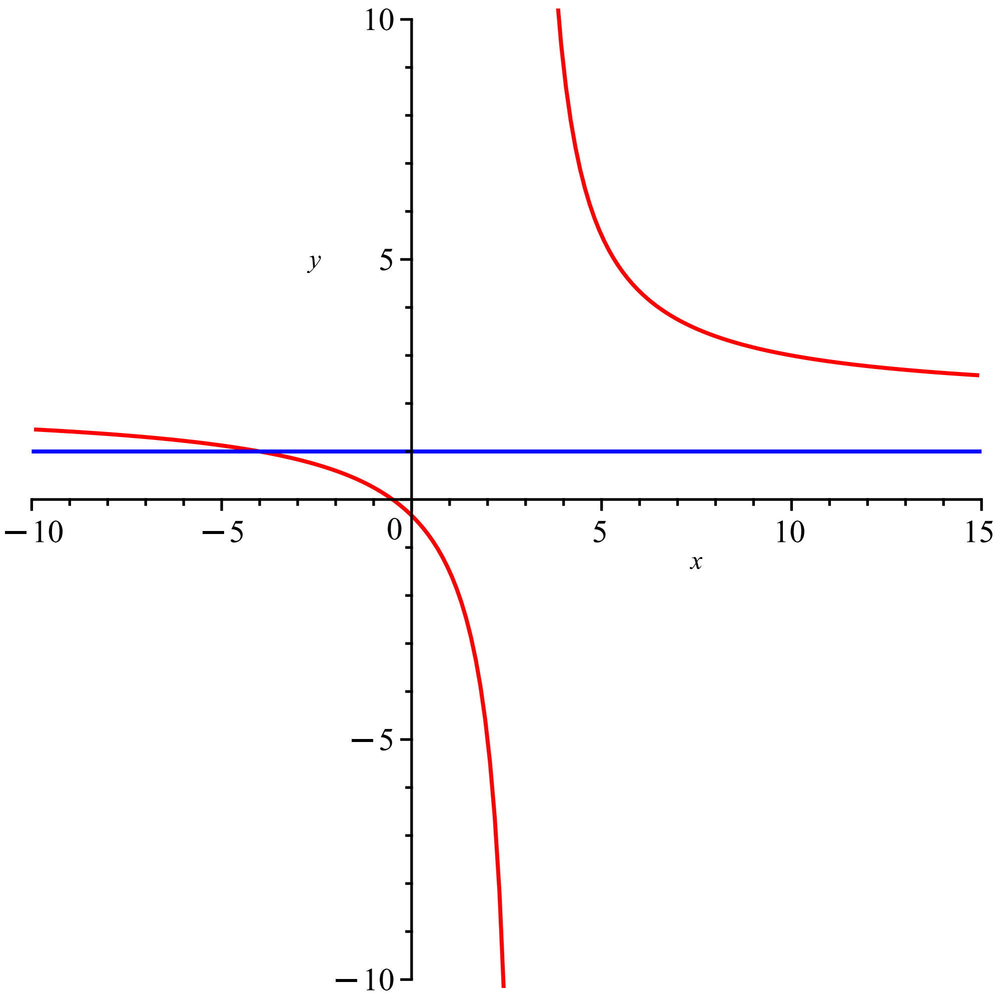
$$1 < \frac{2x+1}{x-3}$$

Ulikheten er oppfylt når

> $solve(\%, \{x\})$

$$\{x < -4\}, \{3 < x\}$$

> $plot([f(x), 1], x = -10..15, y = -10..10, color = [red, blue])$



Resultatet over stemmer med figuren.

d)

> $f := x \mapsto \frac{2 \cdot x + 1}{x + 1} : g := x \mapsto 1 - x :$

> $g(x) < f(x)$

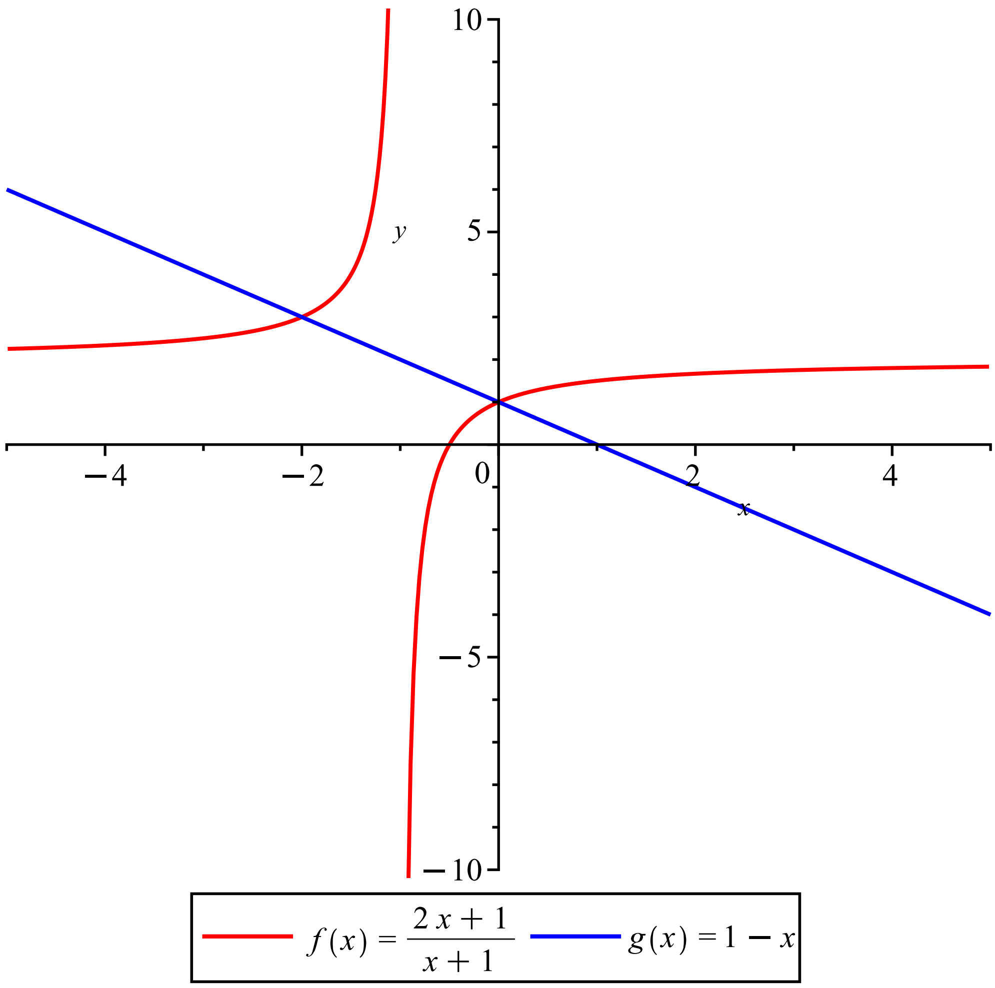
$$1 - x < \frac{2\,x + 1}{x + 1}$$

Løsningen blir

> $solve(\%, \{x\})$

$$\{-2 < x, x < -1\}, \{0 < x\}$$

> $plot([f(x), g(x)], x = -5..5, y = -10..10, color = [red, blue], discont = true, legend = [typeset('f(x)' = f(x)), typeset('g(x)' = g(x))])$



Løsningen stemmer med figuren.

Eksempel 6.4.3

Et åpent kar har form som et rettvinklet prisme (parallellepiped) med kvadratisk bunnflate. Hvor mye kan et slikt kar maksimalt romme når arealet av overflaten er 6 (vilkårlig enhet).

Løsning

Vi kan plotte karet med kommandoen cuboid.

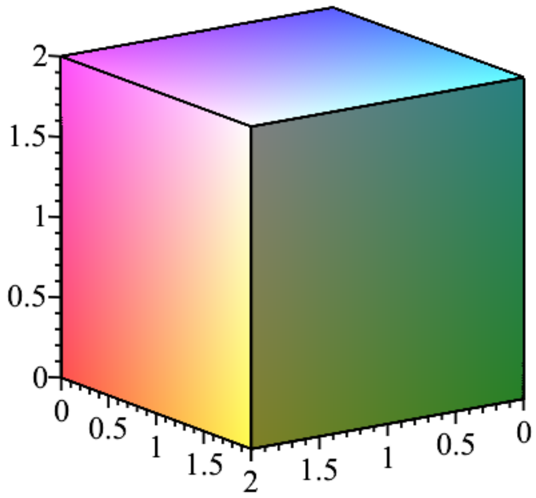
- cuboid ([a, b, c],[d, e, f],*color* = *farge*) plotter et parallellepiped der koordinatene til hjørnene i endepunktene av en diagonal er gitt ved punktene [a, b, c],[d, e, f]. Fargen bestemmes hvis ønskelig med *farge*.

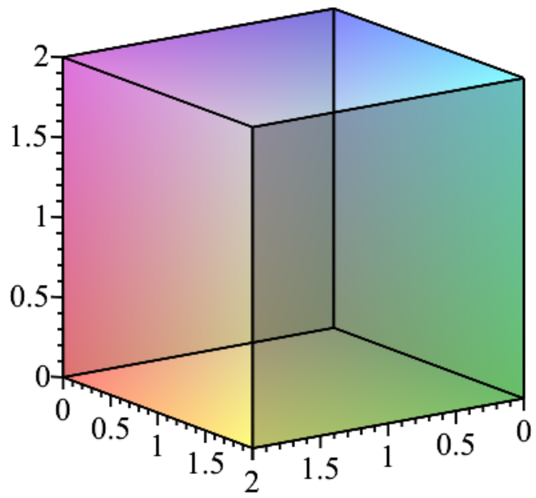
```
> plt := cuboid([0, 0, 0], [2, 2, 2]) :
```

```
> display(plt)
```

Med valget transparency blir terningen gjennomsiktig.

```
> display(plt, transparency = 0.5)
```





Med siden i bunnflaten lik x og høyden h , blir volumet V

> $lign1 := V = x^2\, h : \%$

$$V = x^2\, h$$

Overflaten skal være 6.

> $lign2 := 4\,x\,h + x^2 = 6 : \%$

$$4\,x\,h + x^2 = 6$$

Vi eliminerer h for å få uttrykt V som en funksjon av h.

> $eliminate(\{lign1, lign2\}, h)$

$$\left[\left\{h = \frac{V}{x^2}\right\}, \{x^3 + 4\,V - 6\,x\}\right]$$

Her er

> $4\,V + x^3 - 6\,x = 0$

$$x^3 + 4\,V - 6\,x = 0$$

> $isolate(\%, V)$

$$V = -\frac{1}{4}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x$$

> $Vf := unapply(rhs(\%), x) :$

> $V = Vf(x)$

$$V = -\frac{1}{4}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x$$

Derivasjon gir

> $\frac{'dV'}{dx} = diff(Vf(x), x)$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{3\,x^2}{4} + \frac{3}{2}$$

> $factor(\%)$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{3\,x^2}{4} + \frac{3}{2}$$

Maple vil ikke faktorisere dette andregrads-uttrykket fordi $\sqrt{2}$ inngår i faktorene. Føyer vi til sqrt(2) som andre argument, faktoriseres uttrykket.

> $factor\left(\%, \sqrt{2}\right)$

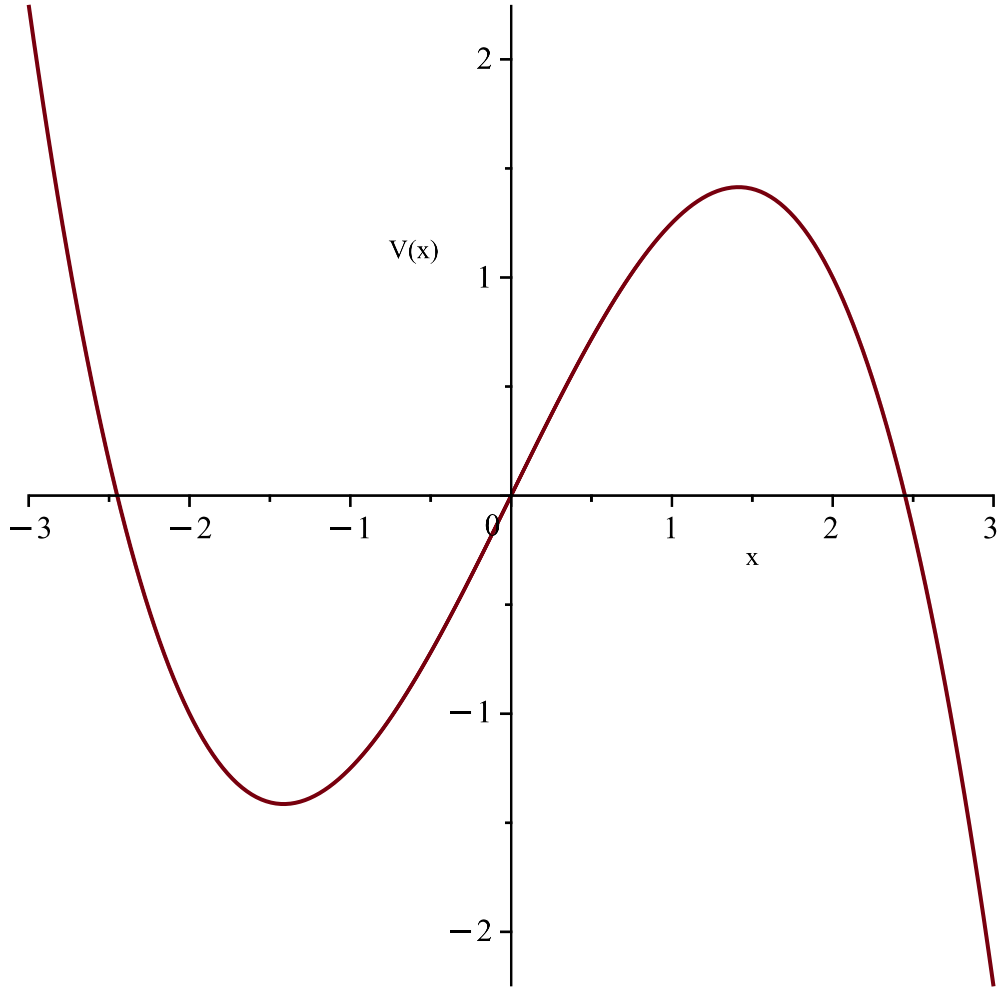
$$\frac{dV}{dx} = \frac{3\left(-x + \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{4}$$

> $solve(rhs(\%) = 0, \{x\})$

$$\left\{x = \sqrt{2}\right\}, \left\{x = -\sqrt{2}\right\}$$

$x = -\sqrt{2}$ gir ingen fysisk løsning, så $x = \sqrt{2}$ må gi maksimalt volum.

> $plot(Vf(x), x = -3..3, labels = ["x", "V(x)"])$



Karets maksimale volum blir

> $V\left(\sqrt{2}\right) = Vf\left(\sqrt{2}\right)$

$$V\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$$

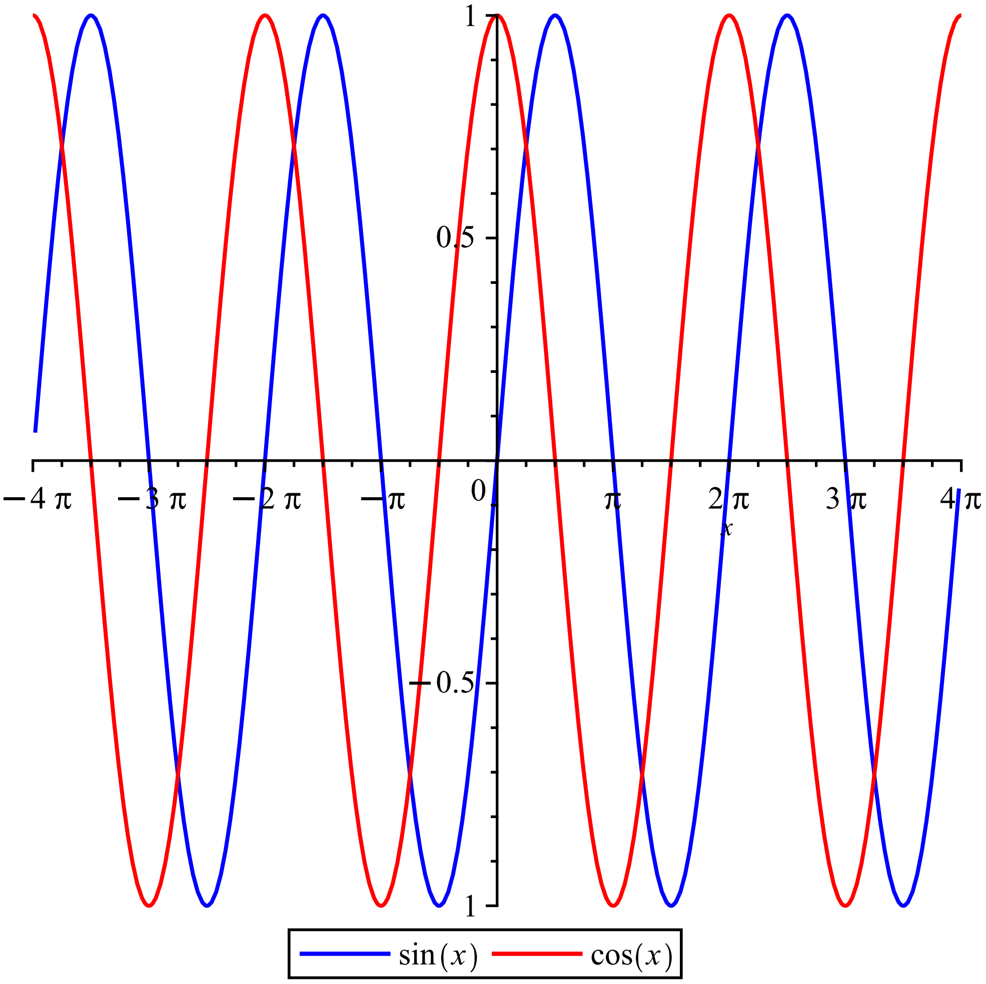
> $evalf(\%)$

$$V\left(\sqrt{2}\right) = 1.414213562$$

>

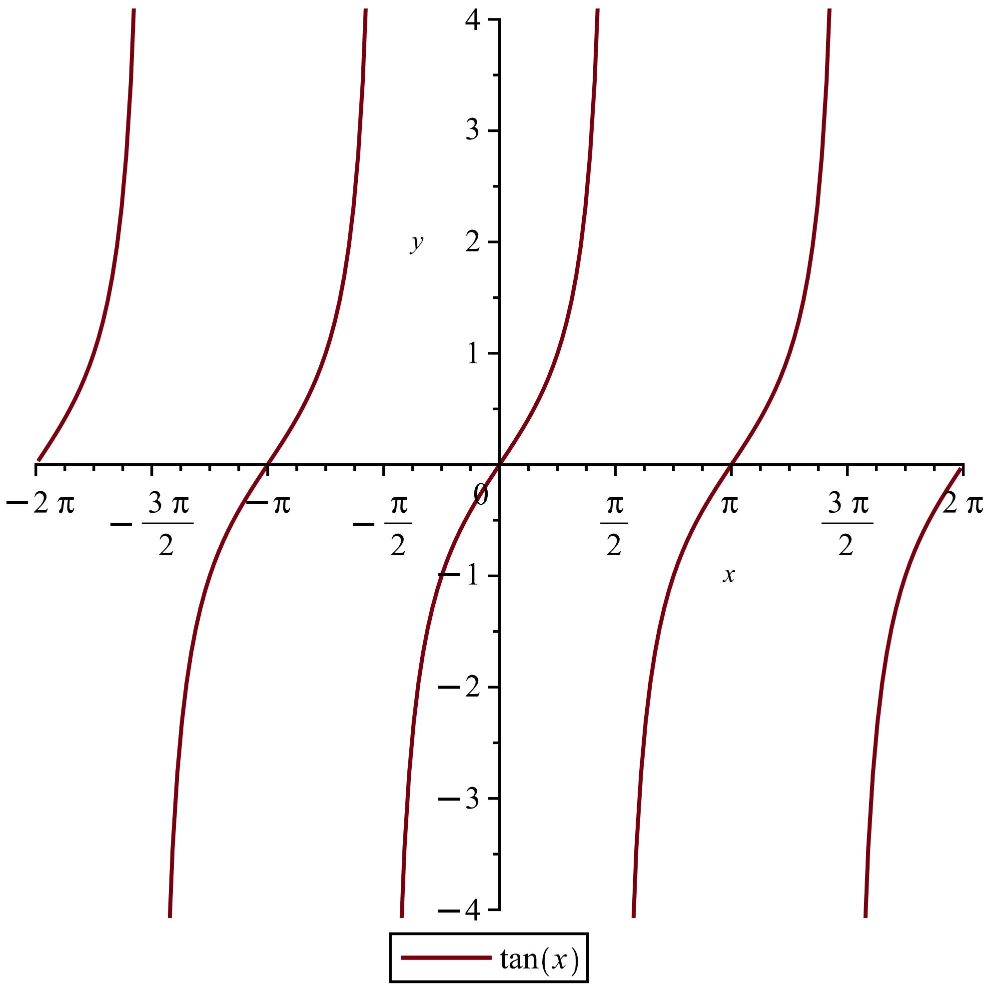
6.5 Grafene til de trigonometriske funksjonene

> $plot([\sin(x), \cos(x)], x = -4\pi..4\pi, color = [blue, red], legend = [\sin(x), \cos(x)])$



Vi ser at funksjonsverdiene gjentar seg periodisk med en periode på 2 π.

> $plot(\tan(x), x = -2\pi..2\pi, y = -4..4, legend = \tan(x))$



$\tan(x)$ har en periode på π .

Eksempel 6.5.1
Bestem nullpunkter, toppunkter og bunnpunkter til
$f(x) = \sin(3\,x) + \cos(2\,x)$
for $-2\,\pi \le x < 2\,\pi$
Løsning

> *restart* :

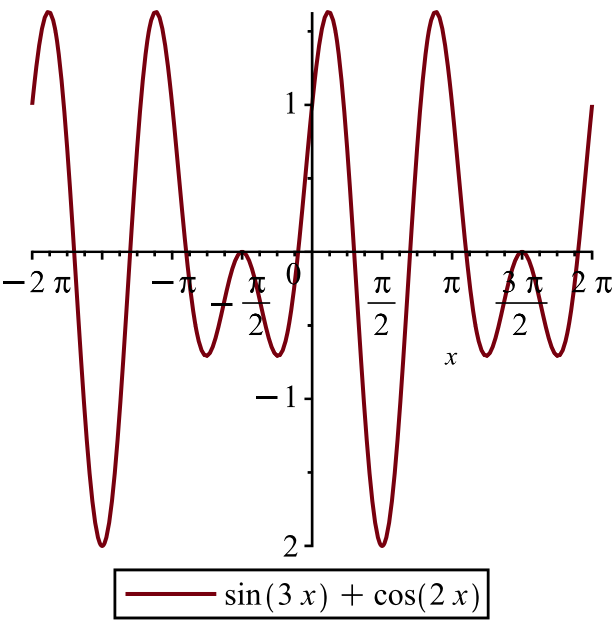
> $f := x \mapsto \sin(3\cdot x) + \cos(2\cdot x)$

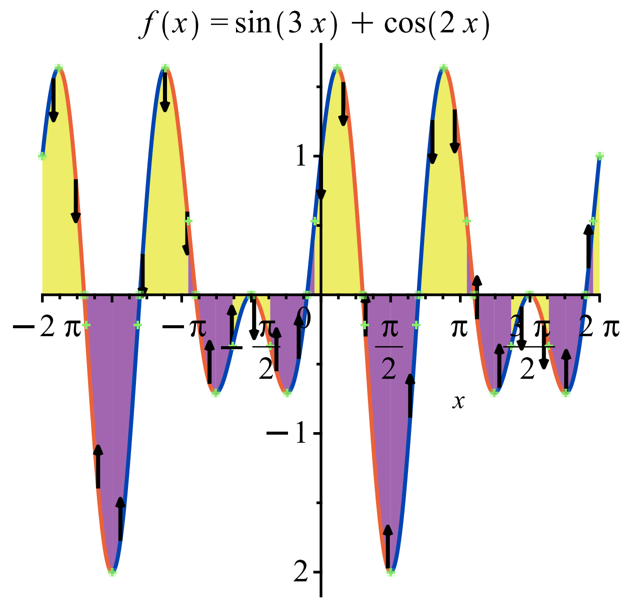
$$f := x \mapsto \sin(3\cdot x) + \cos(2\cdot x)$$

Grafen til f gir en oversikt over nullpunkter og ekstremalpunkter

> $p1 := plot\left(f(x), x = -2\,\pi..2\,\pi, legend = typeset(f(x))\right)$:
%

> $FunctionChart\left(f(x), x = -2\,\pi..2\,\pi, title = typeset('f(x)' = f(x))\right)$





Det fins 10 nullpunkter. Disse verdiene finner vi enklest ved å løse ligningen numerisk med fsolve. Vi definerer løsningen som en funksjon av endepunktene i et intervall som inneholder løsningen. Intervallene plukker vi ut ved å se på figuren.

> $N := (a, b) \mapsto fsolve(f(x), x = a..b)$:

> $nullpunkter := N(-6, -5), N(-5, -3.5), N(-3.5, -2), N(-2, -1), N(-1, 0), N(0, 1.5), N(2, 3), N(3, 4), N(4, 5), N(5, 7)$

$nullpunkter := -5.340707511, -4.084070450, -2.827433388, -1.570796327, -0.3141592654, 0.9424777961, 2.199114858, 3.455751919, 4.712388982, 5.969026042$

Nullpunktene finnes enklest ved kommandoen NullPunkter.

> $NullPunkter(f(x), x = -2\pi..2\pi)$

$[-5.340707512, -4.084070450, -2.827433389, -1.570796327, -0.3141592654, 0.9424777960, 2.199114857, 3.455751918, 4.712388980, 5.969026041]$

> $Roots(f(x), x = -2\pi..2\pi)$

$$\left[-\frac{17\pi}{10}, -\frac{13\pi}{10}, -\frac{9\pi}{10}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{19\pi}{10}\right]$$

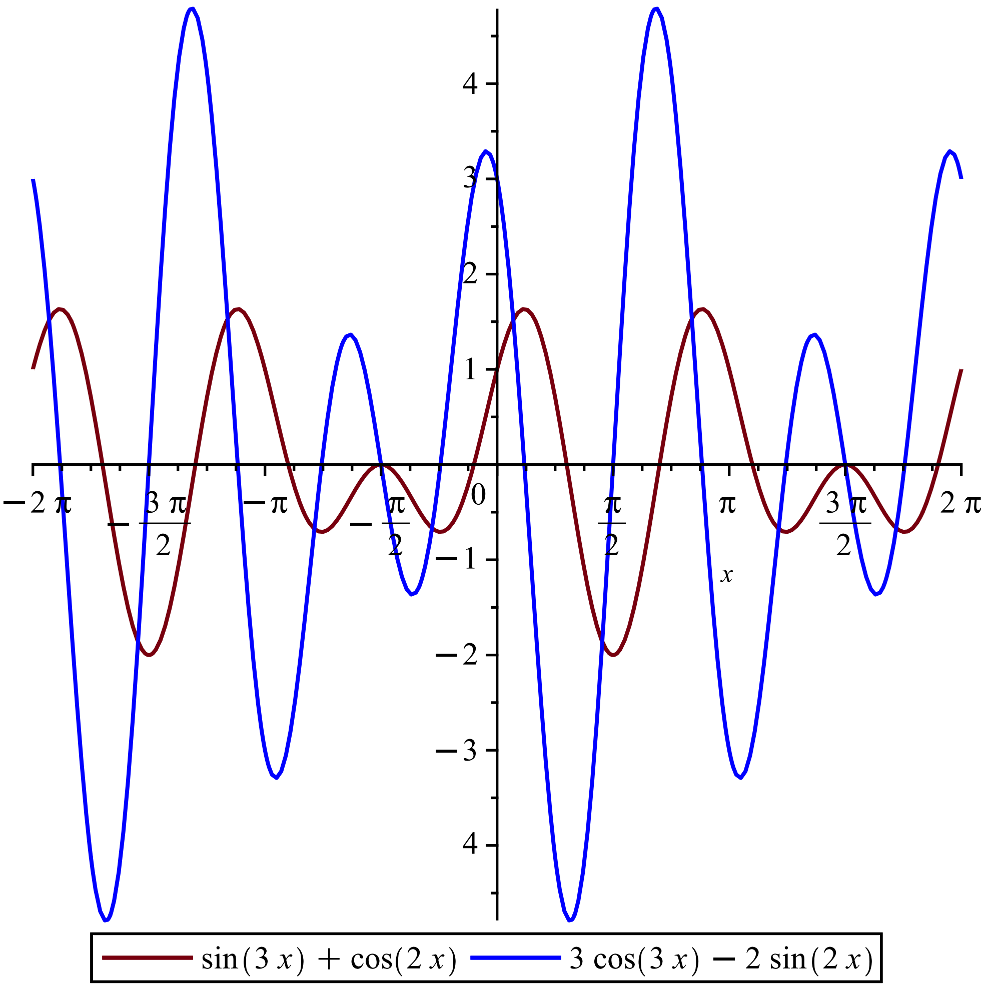
Toppunktene og bunnpunktene finnes ved å derivere og sette den deriverte lik null.

> $diff(f(x), x) = D(f)(x)$

$$3\cos(3x) - 2\sin(2x) = 3\cos(3x) - 2\sin(2x)$$

> $df := D(f)$:

> $p2 := plot(df(x), x = -2\pi..2\pi, legend = typeset(df(x)), color = blue)$:
$display(p1, p2)$



Vi har 12 nullpunkter til $f'(x) = 3\cos(3x) - 2\sin(2x)$.

> $TB := (a, b) \mapsto fsolve(df(x), x = a..b)$:

> $ToppBunnPunkter := TB(-6, -5.5), TB(-5.5, -4.5), TB(-4, -3), TB(-3, -2), TB(-2, -1), TB(-1, -0.75), TB(-0.75, 0.5), TB(0.5, 2.0), TB(2.0, 3.0), TB(3.0, 4.5), TB(4.5, 5.0), TB(5.0, 6)$

$ToppBunnPunkter := -5.914510491, -4.712388980, -3.510267470, -2.374961248, -1.570796327, -0.7666314052, 0.3686748165, 1.570796327, 2.772917837, 3.908224059, 4.712388980, 5.516553902$

> $NullPunkter(f'(x), x = -2\pi..2\pi)$

$[-5.914510491, -4.712388981, -3.510267471, -2.374961249, -1.570796327, -0.7666314052, 0.3686748165, 1.570796326, 2.772917837, 3.908224058, 4.712388980, 5.516553902]$

> $Roots(f'(x), x = -2\pi..2\pi)$

$$\left[-2\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{25 + 2\sqrt{10}}\,\left(-5 + 3\sqrt{10}\right)}{65}\right), -\frac{3\pi}{2}, -\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{25 + 2\sqrt{10}}\,\left(-5 + 3\sqrt{10}\right)}{65}\right), \arctan\left(\frac{\sqrt{25 - 2\sqrt{10}}\,\left(5 + 3\sqrt{10}\right)}{65}\right) - \pi,\right.$$

$$-\frac{\pi}{2}, -\arctan\left(\frac{\sqrt{25-2\sqrt{10}}\,(5+3\sqrt{10})}{65}\right),$$
$$\arctan\left(\frac{\sqrt{25+2\sqrt{10}}\,(-5+3\sqrt{10})}{65}\right), \frac{\pi}{2}, -\arctan\left(\frac{\sqrt{25+2\sqrt{10}}\,(-5+3\sqrt{10})}{65}\right)$$
$$+\pi, \pi+\arctan\left(\frac{\sqrt{25-2\sqrt{10}}\,(5+3\sqrt{10})}{65}\right), \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$
$$-\arctan\left(\frac{\sqrt{25-2\sqrt{10}}\,(5+3\sqrt{10})}{65}\right)\Bigg]$$

> *evalf*(%)

$$[-5.914510492, -4.712388981, -3.510267470, -2.374961249, -1.570796327, -0.7666314052, 0.3686748165, 1.570796327, 2.772917838, 3.908224059, 4.712388981, 5.516553903]$$

>

To av nullpunktene og er også relative maksimumspunkter (toppunkter).

Eksempel 6.5.2

Alle periodiske funksjoner kan fremstilles som en sum av sinus- og cosinusfunksjoner. Plot grafene til

a) Firkantfunksjonen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = \sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\cdots$$

b) Sagtannfunksjonen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin(kx)}{k} = \sin(x)-\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{3}\sin(3x)-\frac{1}{4}\sin(4x)+\cdots$$

c) Trekantfunksjonen:

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} = \frac{8}{\pi^2}\left(\cos(x)+\frac{1}{9}\cos(3x)+\frac{1}{25}\cos(5x)+\cdots\right)$$

Løsning

Vi definerer funksjonene ved hjelp av sum-kommandoen. Da er det enkelt å fremstille grafene med flere og flere ledd i summen.

a)

> $f := n \mapsto \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin((2\cdot k-1)\cdot x)}{2\cdot k-1}$:

> $f(4) = value(f(4))$

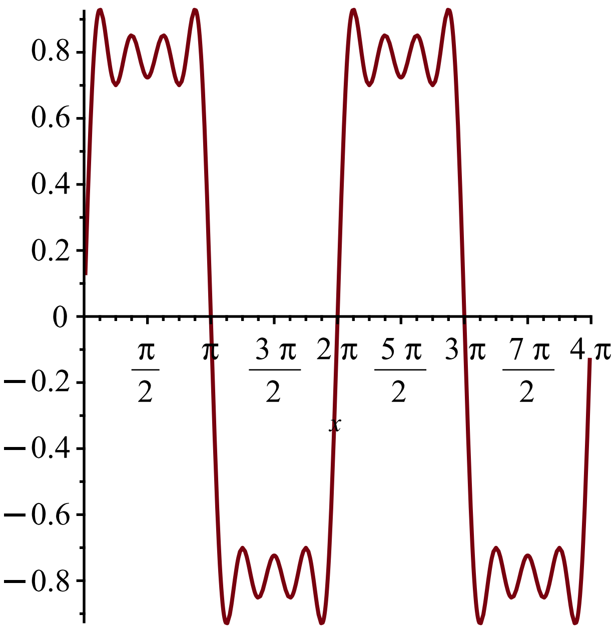
$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = \sin(x)+\frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\sin(5x)}{5}+\frac{\sin(7x)}{7}$$

Vi kan vise grafene til $f(x)$ med flere og flere ledd som en animasjon ved

> *display*(*seq*(*firkant*(2 *n*), *n* = 1 ..20), *insequence* = *true*)

> *firkant* := $n \mapsto$ *plot*(*value*($f(n)$), $x = 0..4 \cdot \pi$) :

> *firkant*(4)



b)

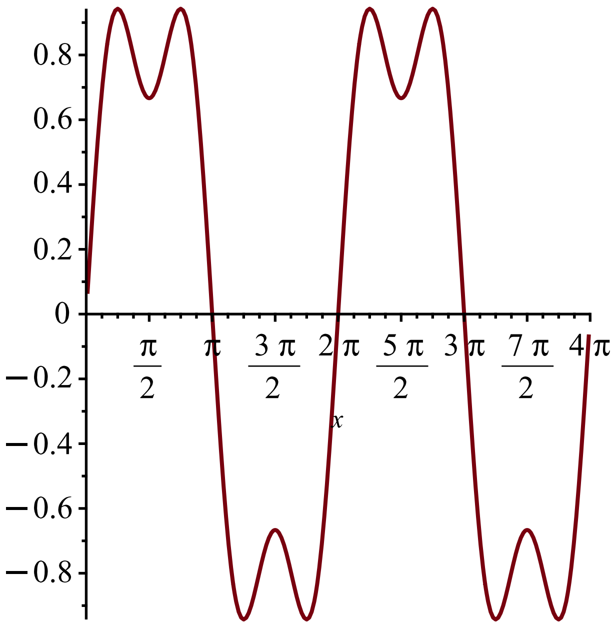
> $f := n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} \cdot \sin(k \cdot x)}{k}$:

> $f(4) = value(f(4))$

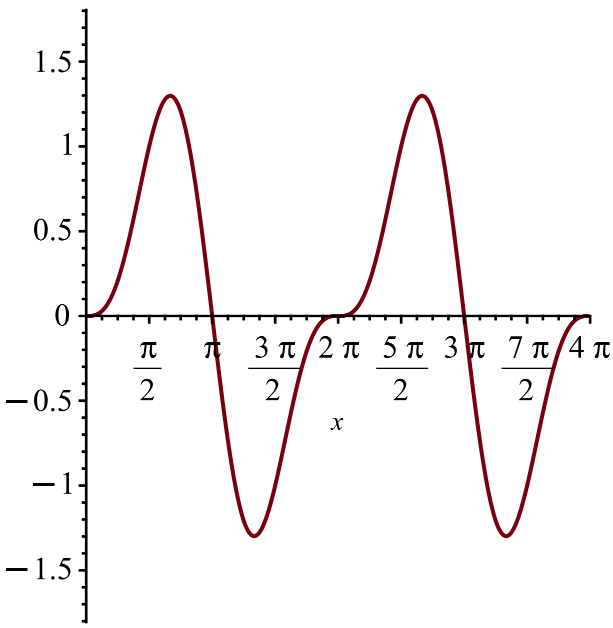
$$\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k+1} \sin(k\,x)}{k} = \sin(x) - \frac{\sin(2\,x)}{2} + \frac{\sin(3\,x)}{3} - \frac{\sin(4\,x)}{4}$$

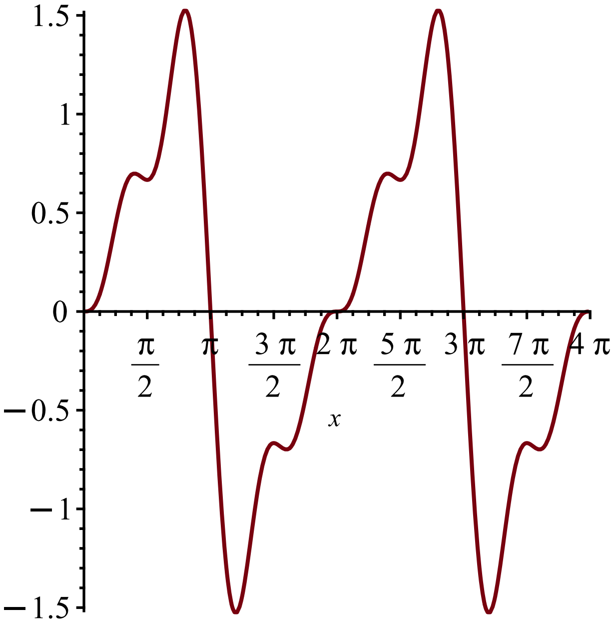
> *sagtann* := $n \mapsto$ *plot*(*value*($f(n)$), $x = 0..4 \cdot \pi$) :

> *sagtann*(4)



> *display*(*seq*(*sagtann*($2\,n$), $n = 1..20$), *insequence* = *true*)





c)

$$> f := n \mapsto \frac{8 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos((2 \cdot k - 1) \cdot x)}{(2 \cdot k - 1)^2}}{\pi^2} :$$

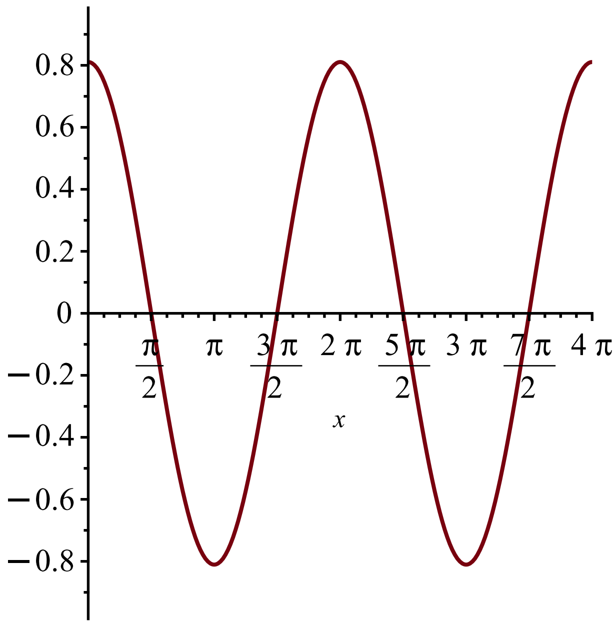
$> f(3) = value(f(3))$

$$\frac{8 \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\cos((2\,k-1)\,x)}{(2\,k-1)^2} \right)}{\pi^2} = \frac{8 \left(\cos(x) + \frac{\cos(3\,x)}{9} + \frac{\cos(5\,x)}{25} \right)}{\pi^2}$$

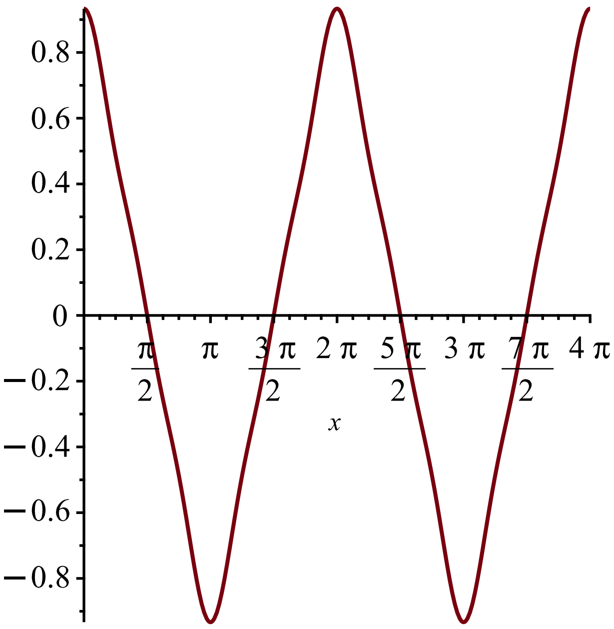
$> trekant := n \mapsto plot(value(f(n)), x = 0 ..4 \cdot \pi) :$

$> trekant(3)$

$> display(seq(trekant(n), n = 1 ..20), insequence = true)$



>



>

6.6 Polynomdivisjon

Polynomdivisjon og nullpunkter kan finnes med følgende kommandoer i vgs-pakken:

- PolynomDivisjon
- NullPunkter

Eksempel 6.6.1

Utfør polynomdivisjonene

a) $\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x - 1}$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x - 1}$$

b) $\frac{x^3 - 8x^2 + 18x}{x - 3}$

$$\frac{x^3 - 8x^2 + 18x}{x - 3}$$

c) $\frac{2x^4 + 6x^2 - 9x + 6}{x - 2}$

$$\frac{2x^4 + 6x^2 - 9x + 6}{x - 2}$$

Løsning

a)

> $T, N := x^3 - 4x^2 + 4x - 1, x - 1 :$

> $PolynomDivisjon(T, N)$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x - 1} = x^2 - 3x + 1$$

Kontroll

> $\% \cdot (x - 1)$

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x-1)(x^2 - 3x + 1)$$

> *expand*(%)

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

eller faktorisering

> *factor*(*T*)

$$(x-1)(x^2 - 3x + 1)$$

> $\frac{\%}{N}$

$$x^2 - 3x + 1$$

Mellomregning

$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x - 1}$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x - 1}$$

> $A := expand(x^2 \cdot (x-1))$

$$A := x^3 - x^2$$

> $B := T - A$

$$B := -3x^2 + 4x - 1$$

> $C := expand(-3x \cdot (x-1))$

$$C := -3x^2 + 3x$$

> $\mathrm{D} := B - C$

$$\mathrm{D} := x - 1$$

> $E := 1 \cdot \mathrm{D}$

$$E := x - 1$$

> $\mathrm{D} - E$

$$0$$

I versjon Maple 2021 finnes kommandoen *LongDivision*(*T*, *N*) , som gir resultatet

> *with*(*Student*[*Basics*]) :

> *LongDivision*(*T*, *N*)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad -3x \quad +1 \\ \hline x-1 & x^3 \quad -4x^2 \quad +4x \quad -1 \\ & \underline{x^3 - x^2} \\ & -3x^2 + 4x \\ & \underline{-3x^2 + 3x} \\ & x - 1 \\ & \underline{x - 1} \\ & 0 \end{array}$$

b)

> *PolynomDivisjon*$(x^3 - 8x^2 + 18x, x - 3)$

c)

> *PolynomDivisjon*$(2x^4 + 6x^2 - 9x + 6, x - 2)$

$$\frac{x^3 - 8x^2 + 18x}{x - 3} = x^2 - 5x + 3 + \frac{9}{x - 3}$$

$$\frac{2x^4 + 6x^2 - 9x + 6}{x - 2} = 2x^3 + 4x^2 + 14x + 19 + \frac{44}{x - 2}$$

>